Количественные характеристики хаоса и периодических процессов в трех типах уравнений с нелинейной реактивностью

*Г. А. Русева, В. И. Медведев**

Институт электроники Болгарской академии наук, 1784 София
** Московский государственный университет, Физический факультет, 117234 Москва*

С помощью ЭВМ проведены численные расчеты количественных характеристик колебаний устанавливающихся в трех неавтономных колебательных системах с разным видом нелинейной реактивности в зависимости от параметров внешней силы. Проведено сравнение особенностей периодических и хаотических колебаний в исследованных системах путем анализа значений дисперсии, гистограмм, спектрального состава и корреляционных функций процессов.

В последние годы интенсивно исследуется хаос в автономных и неавтономных динамических колебательных системах. Это связано с тем, что, во-первых, происходит поиск хаотических режимов работы динамических систем в самых различных областях науки и техники. Во-вторых, это связано с попытками нахождения некоторых универсальных критериев возникновения хаоса или определения областей параметров, при которых та или иная система остается в области рабочего состояния. В-третьих, хаотические движения в динамических системах исследуются с целью их использования в качестве генераторов шума.

В настоящее время продолжается накопление экспериментального материала с целью детального изучения как особенностей возникновения хаоса в конкретных колебательных системах, так и для понимания принципиальных вопросов возникновения странного аттрактора.

Большой интерес представляет изучение хаоса в маломерных неавтономных колебательных системах с нелинейной реактивностью, так как такие системы (параметрические усилители на джозефсоновских контактах, колебательные контура с ферромагнетиками и сегнетоэлектриками, интерферометры на эффекте Джозефсона и др.) находят широкое применение в радиофизике, радиотехнике, электронике, криогенной электронике.

В настоящей работе с помощью ЭВМ исследованы количественные характеристики колебаний в хаотических и бифуркационных областях для трех неавтономных колебательных систем с нелинейной реактивностью, описываемых уравнениями

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x + x^3 = \rho_1 \cos \varphi t, \tag{1}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x - x^3 + 0{,}1x^5 = \rho_1 \cos \omega t, \tag{2}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x + x^3 = \rho_1 \cos \omega t, \tag{3}$$

где $2\delta = 0{,}1$; ρ_1 — амплитуда; ω — частота внешнего воздействия (будем работать' когда ρ_1 и ω безразмерные, время нормированное для каждого ω). Отметим, что возвращающие силы в колебательных системах (2) и (3) имеют падающие участки.

Типичные реализации рассматриваемых систем исследуются в многих работах. В качестве примеров приведем характер эволюции при подходе к хаосу с работой Желудева, Макарова и др.; определение нижней границы хаоса с работами Мельникова и Холмса; по увеличению шумов при приближении к границе хаоса с работой Макнамара, Визенфельда; с теоретической работой по возникновению бифуркации в решении уравнения Дуффинга с теоретической работой Новака, о влиянии

нелинейной реактивности с падающим участком характеристики с работой Лихарева, Корнева и т. д. (3).

Области периодических и хаотических колебаний на плоскости параметров ρ_1 и ω определялись путем анализа построения отображений последования на плоскости Пуанкаре ($x_{k+1}=f(x_k)$) стробоскопическим методом, удобным в режиме диалога на ЭВМ, и приведены в [1].

Для исследования характера получающихся колебаний на подходе к границе хаос-порядок и внутри областей хаоса использовались:
а) спектральный метод анализа в форме быстрого преобразования Фурье (БПФ) по стандартной программе с вычислением спектральных плотностей высших гармоник и субгармоник до 64 включительно; б) вычисление дисперсии $D^2=|x-\bar{x}|^2$; в) построение усредненных гистограмм разброса реализаций численного решения через период внешней силы; г) прямой численный расчет функции корреляции процесса $k(\tau)=\langle x_i x_{i+\tau}-\bar{x}^2\rangle$.

Для каждой из исследованных систем (1), (2), (3) определены количественные характеристики колебательных процессов, возникающих в системах при подходе и пересечении области хаоса путем изменения амплитуды внешней силы ρ_1 при фиксированной безразмерной частоте $\omega=1,\ 3$.

1. Система, описываемая уравнением Дуффинга (1)

При изменении ρ_1 от 1 до 15 колебания происходят на основной частоте ω. В интервале $\rho_1=16{,}00-23{,}64$ расположена область бифуркаций умножения периода $\left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{6}, \frac{\omega}{12}\right)$, далее наблюдаются хаотические колебания. Усредненная за 128 периодов внешней силы дисперсия колебательного процесса увеличивается от $D_0 \approx 10^{-5}$ для колебаний с основной частотой ω до $D_0 \approx 1,\ 3.\ 10^{-4}$ на частоте $\frac{\omega}{3}$. В области хаоса D_0 резко возрастает и составляет для двух значений амплитуд внешней силы $\rho_1=23{,}85$ и $\rho_1=25{,}96$ соответственно $D_0=1{,}2168$ и $D_0=1{,}1867$. Анализ усредненных за 1280 периодов внешней силы гистограмм и значений дисперсии по-

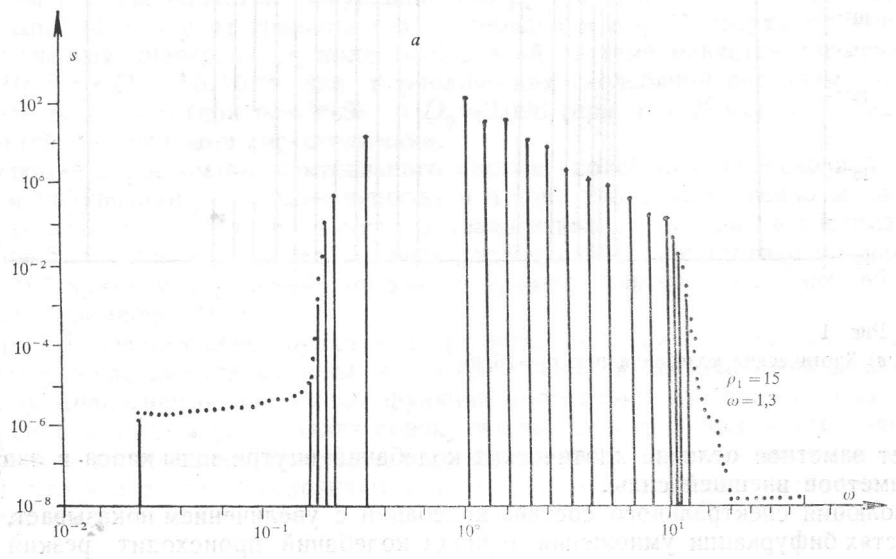

Рис. 1. Спектральный состав колебаний в системе (1) при разных ρ_1 ($\omega=1,\ 3$):
а) Колебания на основной частоте при $\rho_1=15{,}00$;

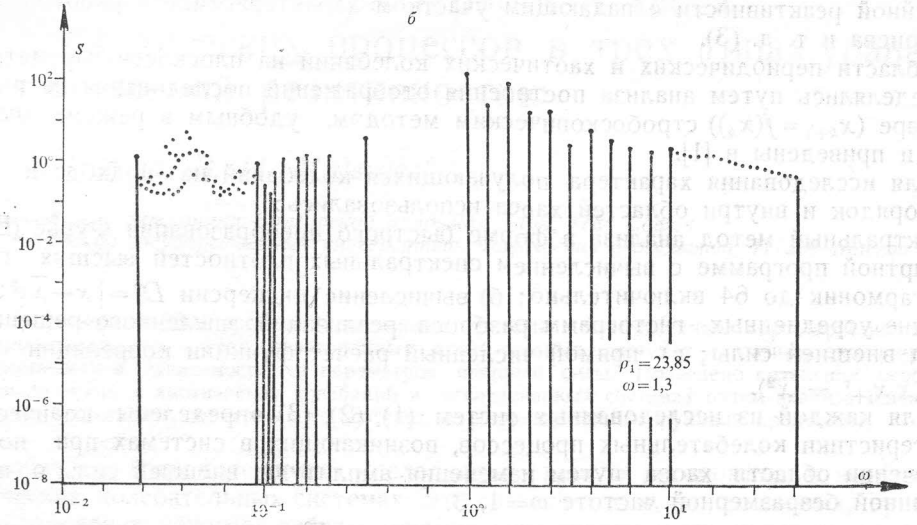

Рис. 1
б) Хаотические колебания при $\rho_1 = 23{,}85$;

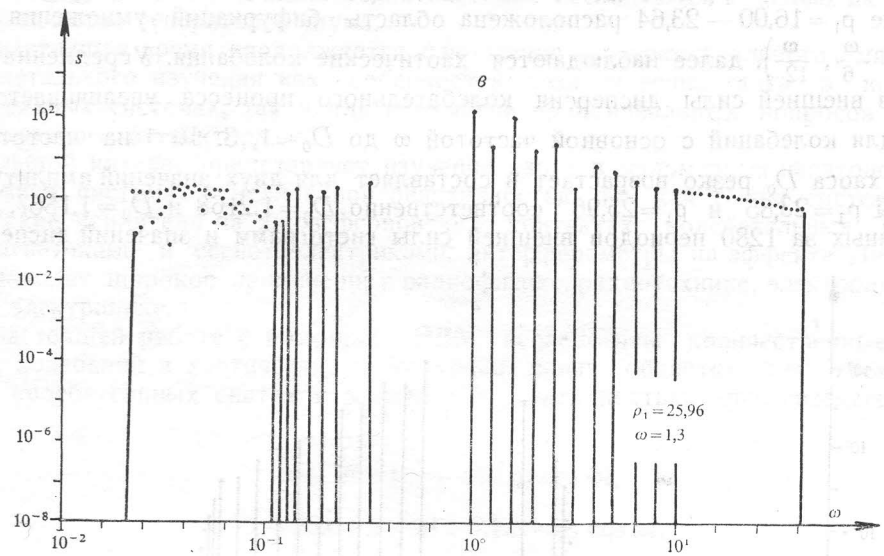

Рис. 1
в) Хаотические колебания при $\rho_1 = 25{,}96$

казывает заметное отличие хаотических колебаний внутри зоны хаоса в зависимости от параметров внешней силы.

Эволюция спектрального состава колебаний с увеличением показывает, что уже в областях бифуркации умножения периода колебаний происходит резкий подъем субгармоник и внешних гармоник, уровень которых в зоне хаоса составляет $\sim 10^{-2}$ от уровня основного колебания (см. рис. 1, *б*, *в*). Вместе с тем из сравнения этих

спектральных характеристик (рис. 1, *б*, *в*) видна разница в спектральном составе хаотических колебаний в одной зоне в зависимости от ρ_1, особенно в отношении субгармоник.

2. Система, описываемая уравнением (2)

Для этой колебательной системы характерны значительно более узкие (по ρ_1) области бифуркаций умножения периода, чем для системы (1), не имеющей падающего участка в выражении нелинейной реактивности. Ширина зоны бифуркаций умножения периода $\left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{4}\right)$ составляет всего $\Delta\rho_1 \approx 0{,}25$, в то время как в случае системы (1) она составляла $\Delta\rho_1 \approx 7{,}5$.

Усредненная дисперсия колебаний растет с ростом ρ_1. При $\rho_1 = 6{,}00$ (колебание на основной частоте) $D_0 \approx 5.10^{-6}$, при $\rho_1 = 10{,}01$ (колебание на основной частоте) $D_0 \approx 10^{-5}$, при $\rho_1 = 12{,}07$ (удвоение перида) $D_0 \approx 1{,}5.10^{-4}$, при $\rho_1 = 12{,}23$ (хаос) $D_0 = 2{,}23$, при $\rho_1 = 12{,}63$ (хаос) $D_0 \approx 2{,}33$. Это отличие в количественных характеристиках колебаний внутри зоны хаоса наглядно видно также на усредненных за 1280 периодов внешней силы гистограммах рис. (2 *а*, *б*), где в случае $\rho_1 = 12{,}23$ разброс количества реализаций, попадающих в 1/10 общего интервала значений несколько болше, чем в случае $\rho_1 = 12{,}63$.

Эволюция спектрального состава колебаний с ростом ρ_1 качественно аналогично системе (1), однако наблюдается некоторое количественное отличие, которое выражается в том, что уровень субгармоник и невысоких гармоник в системе (22) заметно (на несколько порядков) выше, чем в системе (1) при колебаниях в обеих системах на основной частоте.

3. Система, описываемая уравнением (3)

Переход к хаотическим колебаниям и в этой колебательной системе происходит путем бифуркаций умножения периода колебаний в четное и нечетное число раз, причем ширина областей бифуркаций (по ρ_1) составляет для этой системы в среднем $\Delta\rho_1 2$—3 снизу от границы хаос — порядок и $\Delta\rho_1 \ll 1$ сверху от зоны хаоса.

Усредненная дисперсия D_0 колебаний в этой системе меняется с изменением ρ_1 от $D_0 \approx 10^{-5}$ до $D_0 \approx 2{,}5.10^{-4}$ для периодических колебаний вне зоны хаоса, а в зоне хаоса $D_0 \approx 1{,}926$ (при $\rho_1 = 26{,}98$) и $D_0 \approx 2{,}096$ (при $\rho_1 = 29{,}02$), что также подтверждается полученными гистограммами.

Эволюция с ростом ρ_1 спектрального состава колебаний на основной частоте в области бифуркаций умножения периода и в зоне хаоса качественно мало отличается от эволюции спектрального состава аналогичных колебаний в системах (1) и (2). В зоне хаоса для всех исследованных систем отношение плотности вероятности уровней субгармоник и уровней гармоник к уровню колебания на основной частоте составляет, примерно, 10^{-2}.

На рис. 3 представлены функции корреляции $k(\tau)$ для *а*) колебаний на основной частоте после выхода из зоны хаоса ($\rho_1 = 29{,}95$), и *б*) колебаний в зоне хаоса ($\rho_1 = 29{,}25$). Аналогичный вид имеют функции корреляции для аналогичных колебаний и в системах (1) и (2). Анализ совокупности спектральных и корреляционных характеристик хаотических процессов в рассмотренных неавтономных системах показывает, что эти системы сохраняют в этих режимах признаки исходных динамических систем.

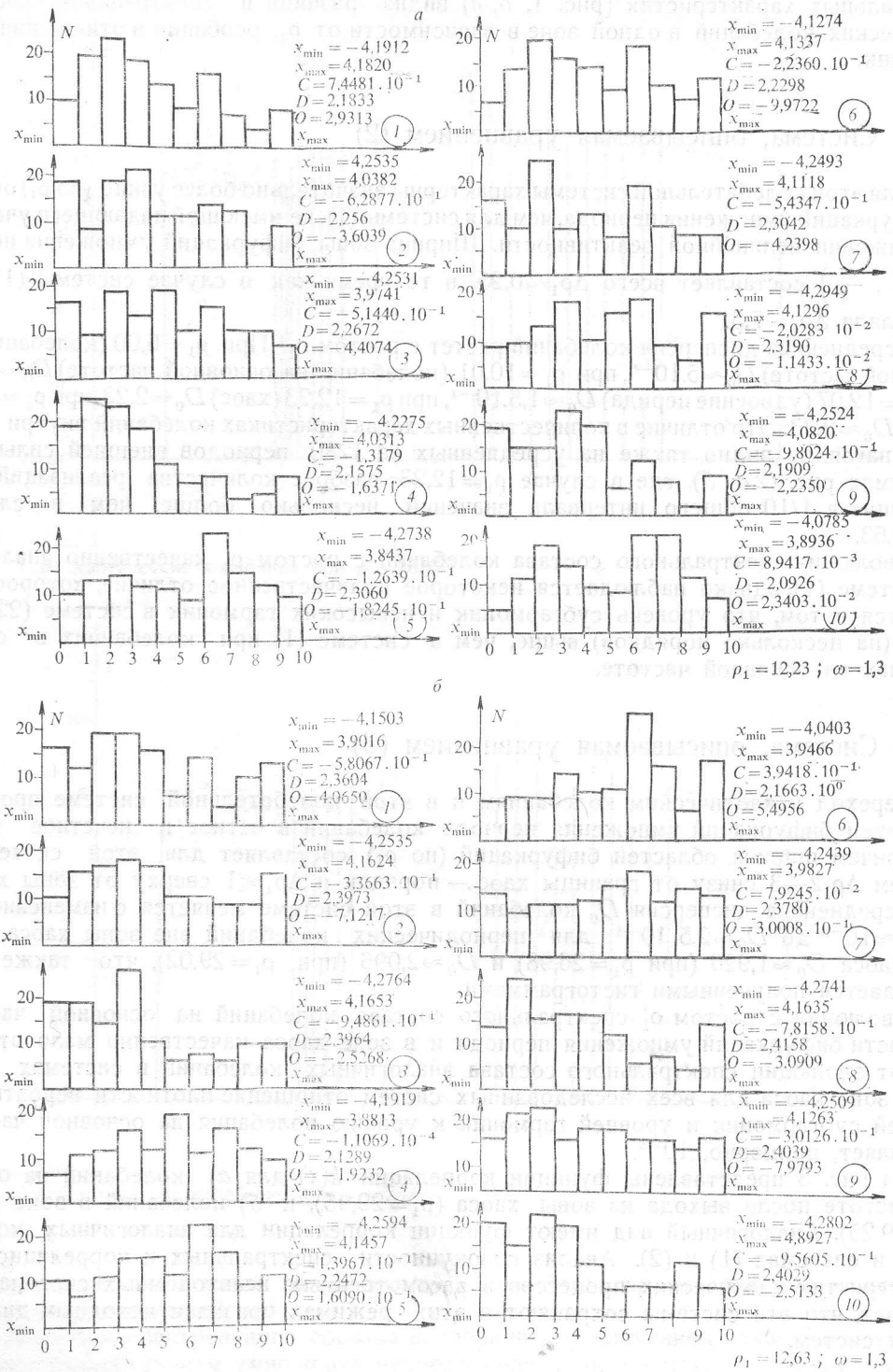

Рис. 2. Усредненные за 1280 периодов гистограммы хаотических колебаний в системе (2) при $\rho_1=12{,}23$ и $\rho_1=12{,}63$

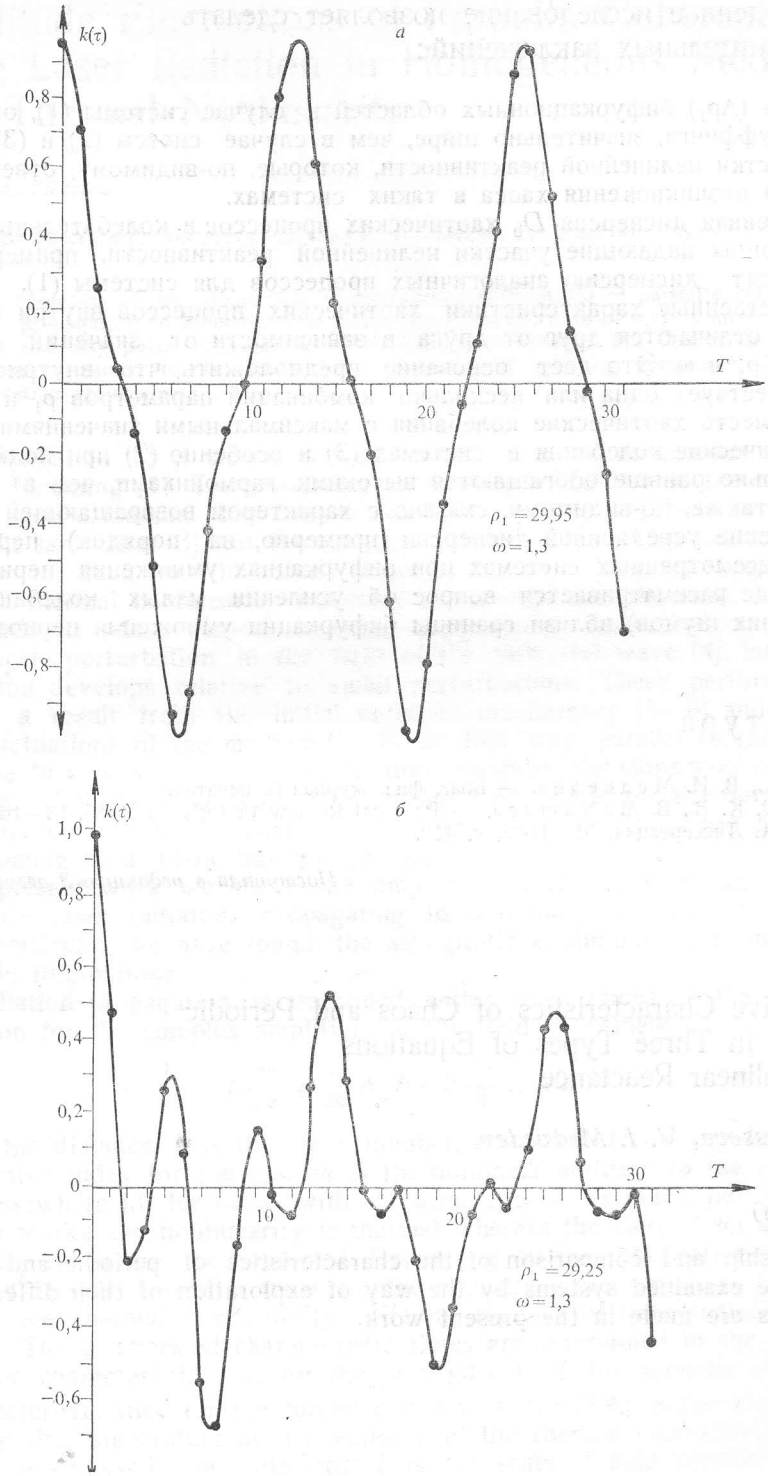

Рис. 3. Функции корреляции $k(\tau)$ для:
а) колебаний на основной частоте ($\rho_1=29{,}95$);
б) хаотических колебаний ($\rho_1=29{,}95$) в системе (3)

4. Проведенное исследование позволяет сделать ряд сравнительных заключений:

а. Ширина ($\Delta\rho_1$) бифуркационных областей в случае системы (1), описываемой уравнением Дуффинга, значительно шире, чем в случае систем (2) и (3), имеющих падающие участки нелинейной реактивности, которые, по-видимому, ответственны за иной механизм возникновения хаоса в таких системах.

б. Усредненная дисперсия D_0 хаотических процессов в колебательных системах (2) и (3), имеющих падающие участки нелинейной реактивности, примерно, в два раза превосходят дисперсию аналогичных процессов для системы (1).

в. Количественные характеристики хаотических процессов внутри одной зоны хаоса заметно отличаются друг от друга в зависимости от значений параметров внешней силы ρ_1 и ω. Это дает основание предположить, что внутри каждой из зон хаоса существует одна или несколько комбинаций параметров ρ_1 и ω, при которых имеют место хаотические колебания с максимальными значениями дисперсии.

г. Периодические колебания в системах (3) и особенно (2) при подходе к зоне хаоса значительно раньше обогащаются высокими гармониками, чем в случае системы (1), что также, по-видимому, связано с характером возвращающей силы.

д. Увеличение усредненной дисперсии (примерно, на порядок) периодических колебаний в рассмотренных системах при бифуркациях умножения периода согласуется с [2], где рассматривается вопрос об усилении малых колебаний (в том числе внутренних шумов) вблизи границы бифуркации умножения периода.

Литература

1. Русева, Г. А., В. И. Медведев. — Болг. физ. журнал (в печати).
2. Wiesenfeld, K. B., B. McNamara. — Physical Review Letter's 55, 1985, 13—16.
3. Русева, Г. А. Диссертация, М., 1987, с. 158.

Поступила в редакцию 3 августа 1988 года

Quantitative Characteristics of Chaos and Periodic Processes in Three Types of Equations with Nonlinear Reactance

G. A. Rousseva, V. I. Medvedev

(Summary)

A relationship and comparison of the characteristics of periodic and chaotic oscillations in the examined systems by the way of exploration of their different characteristic features are made in the present work.